

МЕРА И ИНТЕГРАЛ
(осенний семестр 2026–2027 уч. года)
Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Краткая программа курса

1. ИЗМЕРИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИЗМЕРИМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Алгебры, σ -алгебры. Борелевская σ -алгебра. Измеримые отображения.

2. МЕРЫ. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕР

Меры на системах множеств. Сигма-аддитивность. Продолжение мер. Теорема Каратеодори.

3. МЕРА ЛЕБЕГА В $\mathbb{R}^n$

Основные свойства меры Лебега в $\mathbb{R}^n$: инвариантность относительно движений, поведение при линейных преобразованиях, регулярность и т.д.

4. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Простые функции. Аппроксимация измеримых функций простыми. Интеграл Лебега для неотрицательных функций (сначала простых, затем произвольных измеримых). Интегрируемые функции со значениями в действительных и комплексных числах. Общее понятие интеграла Лебега. Простейшие свойства интеграла. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

5. ПРОИЗВЕДЕНИЯ МЕР И БЛИЗКИЕ ВОПРОСЫ

Произведение мер. Принцип Кавальери. Теорема Фубини-Тонелли. Интеграл Римана в $\mathbb{R}^n$. Связь интегралов Римана и Лебега. Критерий Лебега интегрируемости по Риману. Интеграл Лебега и несобственный интеграл. Непрерывность и дифференцируемость интеграла Лебега по параметру. Образ меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ при C^1 -диффеоморфизме. Замена переменной для интеграла Лебега в $\mathbb{R}^n$.

6. СХОДИМОСТЬ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Сходимость измеримых функций по мере. Неравенство Чебышёва. Сходимость в среднем влечет сходимость по мере. Теорема Рисса о связи сходимостей по мере и почти всюду. Теорема Егорова. Следствие: для конечных мер сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.

7. ПРОСТРАНСТВА L^p

Пространства L^p . Их полнота. Плотные подпространства в L^p .

8. КОМПЛЕКСНЫЕ МЕРЫ

Комплексные меры. Вариация комплексной меры. Положительная и отрицательная вариации действительной меры. Взаимно сингулярные меры. Абсолютная непрерывность мер. Теорема Лебега-Радона-Никодима. Полярное разложение комплексных мер. Разложения Жордана и Хана действительных мер. Интегрирование по комплексной мере.