Мера и интеграл

Вопросы к экзамену 29.12.2025

1. Интеграл простой неотрицательной функции: определение и основные свойства. Общая схема дальнейшего построения интеграла Лебега (только определения): интеграл простой неотрицательной функции, интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции, понятие интегрируемой функции, интеграл интегрируемой функции.

2. Интеграл простой неотрицательной функции: определение и основные свойства (без доказательства). Интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции. Теорема о монотонной сходимости и теорема Фату для неотрицательных функций. Свойства интеграла (в т.ч. его перестановочность со счетными суммами) на классе измеримых неотрицательных функций. Конечность интеграла $[0, +\infty]$-значной функции влечет конечность функции почти всюду.

3. Интеграл простой неотрицательной функции: определение и основные свойства (без доказательства). Интеграл произвольной измеримой неотрицательной функции: определение и основные свойства (без доказательства). Понятие интегрируемой функции, интеграл интегрируемой функции. Векторное пространство интегрируемых функций, линейность интеграла. Модуль интеграла не меньше интеграла модуля.

4. Интеграл измеримой неотрицательной функции равен 0 $\iff$ функция почти всюду равна 0. Критерий равенства интегрируемых функций почти всюду в терминах равенства интегралов по подмножествам.

5. Теорема о монотонной сходимости для интегрируемых функций (разрешается пользоваться соответствующим утверждением о неотрицательных функциях). Теорема Лебега о мажорированной сходимости.

6. Теорема о связи интегралов Римана и Лебега. Теорема о связи несобственного интеграла Римана с интегралом Лебега.

7. Равномерная сходимость влечет сходимость в $\mathscr{L}^1$ для конечных мер. Сходимость измеримых функций по мере. Единственность предела по мере. Неравенство Чебышёва. Сходимость в $\mathscr{L}^1$ влечет сходимость по мере.

8. Последовательности, фундаментальные по мере. Теорема Рисса о связи сходимостей по мере и почти всюду. Следствие о связи сходимостей в $\mathscr{L}^1$ и почти всюду.

9. Теорема Егорова. Следствие: для конечных мер сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.

10. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского. Пространства $L^p(X, \mu)$. Их полнота.

11. Монотонные классы множеств. Лемма о монотонном классе.

12. Произведения мер. Измеримость сечений множества из произведения σ-алгебр. Формулировка леммы о монотонном классе (без доказательства). Принцип Кавальери.

13. Теорема Фубини–Тонелли.

14. Умножение меры на функцию и интеграл по полученной мере. Образ меры при измеримом отображении и интеграл по полученной мере. Связь операций умножения меры на функцию и образа меры.

15. Образ меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ при C^1-диффеоморфизме. Замена переменной для интеграла Лебега в $\mathbb{R}^n$.