

10.1. Для нормированного пространства X обозначим через X_1^n пространство X^n с нормой $\|x\| = \sum \|x_i\|$, а через X_∞^n — пространство X^n с нормой $\|x\| = \max \|x_i\|$ (где $x = (x_1, \dots, x_n)$).

- (а) Постройте изометрические изоморфизмы $(X_1^n)' \cong (X_\infty^n)$ и $(X_\infty^n)' \cong (X_1^n)$.
 (б) Постройте изометрические изоморфизмы $\mathbb{K}_1^n \otimes_\pi X \cong X_1^n$ и $\mathbb{K}_\infty^n \otimes_\varepsilon X \cong X_\infty^n$.
 (в) отождествим пространство $\mathbb{K}_1^n \otimes \mathbb{K}_\infty^n$ с пространством $n \times n$ -матриц $M_n(\mathbb{K})$ при помощи изоморфизма $x \otimes y \mapsto (x_i y_j)$. Для произвольной матрицы $a = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ выразите ее нормы $\|a\|_\pi$ и $\|a\|_\varepsilon$ через матричные элементы a_{ij} (и убедитесь, что в общем случае эти нормы различны).

10.2. Пусть X — банахово пространство и I — множество. Положим

$$\ell^1(I, X) = \left\{ x = (x_i) \in X^I : \|x\| = \sum_i \|x_i\| < \infty \right\},$$

$$\ell^\infty(I, X) = \left\{ x = (x_i) \in X^I : \|x\| = \sup_i \|x_i\| < \infty \right\}.$$

При $X = \mathbb{K}$ эти пространства обозначаются через $\ell^1(I)$ и $\ell^\infty(I)$ соответственно.

- (а) Убедитесь, что $\ell^1(I, X)$ и $\ell^\infty(I, X)$ — банаховы пространства.
 (б) Постройте изометрический изоморфизм $\mathcal{L}(\ell^1(I, X), Y) \cong \ell^\infty(I, \mathcal{L}(X, Y))$.
 (в) Постройте изометрический изоморфизм $\ell^1(I) \widehat{\otimes}_\pi X \cong \ell^1(I, X)$.

10.3. Пусть I, J — множества, P и Q — множества Кёте на I и J соответственно. Определим множество Кёте $P \odot Q$ на $I \times J$, полагая $P \odot Q = \{(p_i q_j) : p \in P, q \in Q\}$. Постройте топологический изоморфизм $\lambda^1(I, P) \widehat{\otimes}_\pi \lambda^1(J, Q) \cong \lambda^1(I \times J, P \odot Q)$.

10.4. Рассмотрим пространство Кёте

$$s(\mathbb{Z}^n) = \left\{ x = (x_\alpha) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}^n} : \|x\|_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |x_\alpha| |\alpha|^k < \infty \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (а) Постройте топологический изоморфизм $s(\mathbb{Z}^n) \widehat{\otimes}_\pi s(\mathbb{Z}^m) \cong s(\mathbb{Z}^{n+m})$.
 (б) Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{T}^n) \widehat{\otimes}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^m) \cong C^\infty(\mathbb{T}^{n+m})$, где \mathbb{T}^n — n -мерный тор. (Указание: воспользуйтесь п. (а) и n -мерным аналогом задачи 2.12.)

10.5. Постройте топологический изоморфизм $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\mathbb{D}_s^m) \cong \mathcal{O}(\mathbb{D}_r^n \times \mathbb{D}_s^m)$. (Указание: см. задачи 10.3 и 5.19.)

10.6. Пусть E и F — полунормированные пространства, S и T — нормирующие подмножества единичных шаров пространств E' и F' соответственно. Докажите, что

$$\|u\|_\varepsilon = \sup \{ |(f \otimes g)(u)| : f \in S, g \in T \} \quad (u \in E \otimes F).$$

10.7. Пусть X — банахово пространство и I — множество. Положим

$$c_0(I, X) = \left\{ x = (x_i) \in X^I : \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i\| = 0 \right\}.$$

При $X = \mathbb{K}$ это пространство обозначается через $c_0(I)$.

- (а) Докажите, что $c_0(I, X)$ — замкнутое векторное подпространство в $\ell^\infty(I, X)$ (и, следовательно, банахово пространство).
 (б) Постройте изометрический изоморфизм $c_0(I) \widehat{\otimes}_\varepsilon X \cong c_0(I, X)$.
 (в) Постройте изометрический изоморфизм $c_0(I) \widehat{\otimes}_\varepsilon c_0(J) \cong c_0(I \times J)$.

10.8. Для следующих канонических отображений докажите, что они не являются ни топологически инъективными, ни сюръективными:

- (a) $\ell^1 \widehat{\otimes}_\pi c_0 \rightarrow \ell^1 \widehat{\otimes}_\varepsilon c_0$;
- (b) $\ell^1 \widehat{\otimes}_\pi \ell^p \rightarrow \ell^1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \ell^p$ при $1 < p < \infty$;
- (c) $\ell^1 \widehat{\otimes}_\pi \ell^1 \rightarrow \ell^1 \widehat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$;
- (d) $c_0 \widehat{\otimes}_\pi c_0 \rightarrow c_0 \widehat{\otimes}_\varepsilon c_0$;
- (e) $C[0, 1] \widehat{\otimes}_\pi C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \widehat{\otimes}_\varepsilon C[0, 1]$.

10.9. Пусть X и Y — локально компактные топологические пространства. Постройте топологический изоморфизм $C(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon C(Y) \cong C(X \times Y)$. (*Указание:* сведите все к разобранному на лекции случаю, когда X и Y компактны.)

10.10. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества.

(a) Докажите, что линейное отображение

$$\begin{aligned} C_c^\infty(U) \otimes C_c^\infty(V) &\rightarrow C_c^\infty(U \times V), \\ f \otimes g &\mapsto ((x, y) \mapsto f(x)g(y)), \end{aligned} \quad (1)$$

инъективно и имеет плотный образ. (*Указание:* для доказательства плотности образа можно воспользоваться рядами Фурье.)

(b) Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(U) \widehat{\otimes}_\varepsilon C^\infty(V) \cong C^\infty(U \times V)$. (*Указание:* для доказательства топологической инъективности отображения $C^\infty(U) \otimes_\varepsilon C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U \times V)$, заданного формулой (1), можно воспользоваться изометрическим изоморфизмом $C(X) \widehat{\otimes}_\varepsilon C(Y) \cong C(X \times Y)$, где X и Y — компакты; для доказательства плотности его образа пригодится п. (a).)

10.11. Постройте топологический изоморфизм $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. (*Указание:* можно действовать так же, как в задаче 10.10 (b).)

10.12. Пусть I, J — множества, P и Q — множества Кёте на I и J соответственно. Определим множество Кёте $P \odot Q$ на $I \times J$, полагая $P \odot Q = \{(p_i q_j) : p \in P, q \in Q\}$. Постройте топологический изоморфизм $\lambda^0(I, P) \widehat{\otimes}_\varepsilon \lambda^0(J, Q) \cong \lambda^0(I \times J, P \odot Q)$.

10.13. Докажите, что канонические отображения $C^\infty(\mathbb{T}^n) \widehat{\otimes}_\pi C^\infty(\mathbb{T}^m) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n) \widehat{\otimes}_\varepsilon C^\infty(\mathbb{T}^m)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{D}_r^n) \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{O}(\mathbb{D}_s^m) \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{D}_r^n) \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{O}(\mathbb{D}_s^m)$ — топологические изоморфизмы. (*Указание:* воспользуйтесь задачами 10.3 и 10.12. Скоро мы увидим, что эти изоморфизмы вытекают из ядерности рассматриваемых пространств.)