9.1. Пусть X, Y, Z — топологические векторные пространства. Докажите, что билинейное отображение $X \times Y \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в точке $(0, 0)$.

9.2. Пусть X, Y, Z — локально выпуклые пространства, P, Q, R — определяющие семейства полунорм на X, Y, Z соответственно, причем семейства P и Q направленные. Докажите, что билинейное отображение $\Phi\colon X \times Y \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого $r \in R$ найдутся такие $p \in P$, $q \in Q$ и $C > 0$, что $r(\Phi(x, y)) \leqslant Cp(x)q(y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$.

9.3. Пусть X, Y, Z — полунормированные пространства. Докажите, что полунормированные пространства $\mathscr{L}(X, Z)$ и $\mathscr{B}il(X \times Y, Z)$ являются нормированными тогда и только тогда, когда Z — нормированное пространство.

9.4. Пусть X и Y — полунормированные пространства. Докажите, что открытый единичный шар пространства $X \otimes_\pi Y$ является выпуклой оболочкой множества $U_X \odot U_Y = \{x \otimes y : x \in U_X,\ y \in U_Y\}$, где U_X и U_Y — открытые единичные шары пространств X и Y соответственно. Как следствие, проективная тензорная полунорма на $X \otimes Y$ равна функционалу Минковского множества $\operatorname{conv}(U_X \odot U_Y)$.

9.5. Пусть X и Y — полунормированные пространства. Докажите, что для любого полунормированного пространства Z и любого непрерывного билинейного отображения $\Phi\colon X \times Y \to Z$ его линеаризация $\varphi\colon X \otimes_\pi Y \to Z$ непрерывна, и $\|\varphi\| = \|\Phi\|$.

9.6. Пусть X и Y — полунормированные пространства. Докажите, что полунорма α на $X \otimes Y$ является приемлемой кросс-полунормой тогда и только тогда, когда $\|\cdot\|_\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \|\cdot\|_\pi$.

9.7. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства. Докажите, что
(a) топология на $X \otimes_\pi Y$ — сильнейшая из всех локально выпуклых топологий на $X \otimes Y$, в которых каноническое отображение $X \times Y \to X \otimes Y$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$, непрерывно;
(b) если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — базы окрестностей нуля в X и Y соответственно, то семейство $\{\Gamma(U \odot V) : U \in \mathscr{U},\ V \in \mathscr{V}\}$ — база окрестностей нуля в $X \otimes_\pi Y$.

9.8. Пусть X и Y — бесконечномерные нормированные пространства. Докажите, что пространства $X \otimes_\pi Y$ и $X \otimes_\varepsilon Y$ неполны.

9.9. Сформулируйте и докажите коммутативность и ассоциативность тензорных произведений $\otimes_\pi$, $\otimes_\varepsilon$, $\widehat{\otimes}_\pi$, $\widehat{\otimes}_\varepsilon$, а также их аддитивность по каждому из аргументов.

9.10. Постройте естественный изометрический изоморфизм $\mathscr{L}(X \otimes_\pi Y, Z) \cong \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y, Z))$, где X, Y, Z — полунормированные пространства.

9.11. Пусть X и Y_i $(i \in I)$ — локально выпуклые пространства. Обязательно ли изоморфизм векторных пространств $X \otimes_\pi (\bigoplus_{i \in I} Y_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (X \otimes_\pi Y_i)$ является топологическим изоморфизмом? Тот же вопрос для $\otimes_\varepsilon$.