

8.1. Пусть X — полное локально выпуклое пространство, P — направленное определяющее семейство полунорм на X . Напомним (см. лекцию), что существует топологический изоморфизм $X \cong \varprojlim \tilde{X}_p$, где для каждого $p \in P$ через \tilde{X}_p обозначено пополнение нормированного пространства $X_p = (X/p^{-1}(0), \hat{p})$. Опишите пространства \tilde{X}_p для каждого из следующих пространств X :

- (a) \mathbb{K}^S , где S — множество;
- (b) $C(T)$, где T — локально компактное топологическое пространство;
- (c) $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
- (d) $\mathcal{O}(U)$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество;
- (e) пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
- (f) пространства Кёте $\lambda^\nu(P)$;
- (g) $C_c(T)$, где T — локально компактное топологическое пространство со счетной базой.

8.2. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Опишите пополнение сопряженного пространства X' , снабженного слабой* топологией.

Определение 8.1. Пусть X — локально выпуклое пространство. *Борнологическое пространство, ассоциированное с X* , — это пара (X_{born}, i) , состоящая из борнологического локально выпуклого пространства X_{born} и отображения $i \in \mathcal{L}(X_{\text{born}}, X)$ и обладающая следующим свойством: для любого борнологического локально выпуклого пространства Y и любого $\varphi \in \mathcal{L}(Y, X)$ существует единственное отображение $\psi \in \mathcal{L}(Y, X_{\text{born}})$, делающее диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \swarrow \psi & \downarrow \varphi \\ X_{\text{born}} & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

коммутативной.

8.3. Пусть X — локально выпуклое пространство. Предположим, что на X существует локально выпуклая топология \mathcal{T} , которая не слабее исходной, превращает X в борнологическое локально выпуклое пространство и обладает тем свойством, что подмножество X \mathcal{T} -ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено в исходной топологии. Докажите, что пространство (X, \mathcal{T}) вместе с тождественным отображением $(X, \mathcal{T}) \rightarrow X$ — борнологическое пространство, ассоциированное с X .

8.4 (конструкция X_{born}). Пусть X — локально выпуклое пространство. Обозначим через P_{born} семейство все полунорм p на X , обладающих тем свойством, что для каждого ограниченного множества $B \subset X$ множество $p(B)$ ограничено в \mathbb{R} . Докажите, что пространство $(X, \tau(P_{\text{born}}))$ вместе с тождественным отображением $(X, \tau(P_{\text{born}})) \rightarrow X$ — борнологическое пространство, ассоциированное с X .

8.5. Интерпретируйте X_{born} в терминах сопряженных функторов.

8.6 (другая конструкция X_{born}). Пусть X — локально выпуклое пространство, $\text{Bdd}(X)$ — семейство всех его абсолютно выпуклых ограниченных подмножеств. Введем на $\text{Bdd}(X)$ отношение порядка, полагая $B_1 \leq B_2$, если B_1 поглощается B_2 . Для каждого $B \in \text{Bdd}(X)$ положим $X_B = \text{span}(B)$ и будем рассматривать X_B как полунормированное пространство, полунорма на котором — функционал Минковского множества B . Если $B_1, B_2 \in \text{Bdd}(X)$ и $B_1 \leq B_2$, то тавтологическое вложение X_{B_1} в X_{B_2} непрерывно (убедитесь). Таким образом, пространства X_B образуют прямую систему. Докажите, что $\varinjlim \{X_B : B \in \text{Bdd}(X)\} \cong X_{\text{born}}$.

8.7. Докажите, что

- (а) локально выпуклое пространство борнологично тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому пределу полунормированных пространств;
- (б) полное борнологическое локально выпуклое пространство изоморфно прямому пределу банаховых пространств.

8.8. Пусть X и Y — нормированные пространства. Докажите, что множество $S \subset \mathcal{L}(X, Y)$ равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме.

8.9. Приведите пример нормированного пространства и слабо* ограниченной последовательности в X' , не ограниченной по норме. (Этот пример показывает, что для неполных нормированных пространств теорема Банаха–Штейнгауза неверна, и поэтому нормированное пространство может не быть бочечным. В частности, борнологическое локально выпуклое пространство не всегда бочечно.)

8.10* (бочечное неборнологическое пространство). Пусть S — несчетное множество, $X = \mathbb{K}^S$, X_0 — подпространство в X , состоящее из функций с не более чем счетным носителем, и $X_1 = X_0 \oplus \mathbb{K}1 \subset X$. Докажите, что

- (а) X_0 бочечно;
- (б) если локально выпуклое пространство содержит плотное бочечное подпространство, то оно бочечно;
- (с) X_1 бочечно;
- (д) секвенциально замкнутая гиперплоскость борнологического локально выпуклого пространства замкнута;
- (е) X_1 не является борнологическим.

8.11. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, $A \subset X$ — плотное подмножество. Докажите, что на каждом равномерно непрерывном подмножестве $S \subset \mathcal{L}(X, Y)$ топология поточечной сходимости на элементах A совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах.

8.12. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, причем X бочечно. Предположим, что (T_n) — такая последовательность в $\mathcal{L}(X, Y)$, что для каждого $x \in X$ последовательность $(T_n x)$ сходится в Y . Докажите, что (T_n) поточечно сходится к некоторому $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Верно ли аналогичное утверждение для направленностей?

8.13. Пусть X, Y, Z — локально выпуклые пространства, причем X и Y метризуемы, и хотя бы одно из пространств X, Y полно. Докажите, что каждое отдельно непрерывное билинейное отображение $X \times Y \rightarrow Z$ непрерывно. Верно ли это утверждение, если X, Y — неполные нормированные пространства?

8.14. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, причем X квазибочечно. Докажите, что каждое ограниченное подмножество $S \subset \mathcal{L}_b(X, Y)$ равномерно непрерывно.

8.15. Пусть X и Y — метризуемые локально выпуклые пространства, причем X полно, и пусть $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$. Докажите, что либо $\varphi(X) = Y$, либо $\varphi(X)$ — множество первой категории в Y (т.е. объединение счетного числа нигде не плотных множеств).

8.16 (теорема Гротендика о факторизации). Пусть X — пространство Фреше, Y — локально выпуклое пространство, $\{X_n\}$ — последовательность пространств Фреше, $\varphi \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\varphi_n \in \mathcal{L}(X_n, Y)$ ($n \in \mathbb{N}$). Предположим, что $\varphi(X) \subset \bigcup_n \varphi_n(X_n)$. Докажите, что

- (а) $\varphi(X) \subset \varphi_n(X_n)$ для некоторого n ;

(b) если все φ_i инъективны, то для некоторого n существует такое отображение $\psi \in \mathcal{L}(X, X_n)$, что $\varphi = \varphi_n \psi$.

Указание: пусть $Z_n = X \times_Y X_n$ и $\pi_n: Z_n \rightarrow X$ — проекция на 1-ый сомножитель; с помощью теоремы Бэра и 8.15 докажите, что $X = \pi_n(Z_n)$ для некоторого n .

8.17 (теоремы Гротендика об открытом отображении и о замкнутом графике). Пусть X и Y — локально выпуклые пространства. Предположим, что топология на X является индуктивной относительно некоторой последовательности линейных отображений $\{\varphi_n: X_n \rightarrow X\}$, где X_n — пространства Фреше и $\bigcup_n \varphi_n(X_n) = X$, а топология на Y является индуктивной относительно некоторого (не обязательно счетного) семейства линейных отображений $\{\psi_i: Y_i \rightarrow Y\}$, где Y_i — пространства Фреше и $\bigcup_i \psi_i(Y_i) = Y$ (например, это так, если Y — полное борнологическое пространство; см. задачу 8.7). Докажите, что

- (1) каждая непрерывная линейная сюръекция X на Y открыта;
- (2) каждое линейное отображение из Y в X с замкнутым графиком непрерывно.