4.1. Пусть X — топологическое векторное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Докажите, что факторпространство X/X_0 хаусдорфово тогда и только тогда, когда X_0 замкнуто в X.

4.2. Пусть X — векторное пространство, снабженное проективной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$, где $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что
(1) проективная топология на X — слабейшая из всех локально выпуклых топологий на X, относительно которых все φ_i непрерывны;
(2) проективная топология на X — слабейшая из всех топологий на X, относительно которых все φ_i непрерывны;
(3) проективная топология на X — единственная локально выпуклая топология на X со следующим свойством: если Y — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi\colon Y \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\varphi_i \circ \psi\colon Y \to X_i$ непрерывны;
(4) если для каждого $i \in I$ задана предбаза окрестностей нуля σ_i в X_i, то семейство $\{\varphi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \sigma_i,\ i \in I\}$ является предбазой окрестностей нуля в X.

4.3. Пусть X — векторное пространство, снабженное индуктивной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$, где $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что
(1) индуктивная топология на X — сильнейшая из всех локально выпуклых топологий на X, относительно которых все φ_i непрерывны;
(2) индуктивная топология на X — единственная локально выпуклая топология на X со следующим свойством: если Y — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\psi \circ \varphi_i\colon X_i \to Y$ непрерывны;
(3) семейство всех абсолютно выпуклых поглощающих множеств $U \subset X$, таких, что $\varphi_i^{-1}(U)$ — окрестность нуля в X_i для всех i, образует базу окрестностей нуля в X.

4.4. Пусть X, X_i, φ_i — те же, что в предыдущей задаче. Предположим дополнительно, что $X = \sum_{i\in I} \operatorname{Im} \varphi_i$. Соответствующую индуктивную локально выпуклую топологию на X обозначим через τ_{ivc}.
(1) Докажите, что на X существует сильнейшая из всех топологий, таких, что все отображения φ_i непрерывны. Эту топологию будем обозначать через τ_{i}.
(2) Докажите, что на X существует сильнейшая из всех топологий, превращающих X в топологическое векторное пространство и таких, что все отображения φ_i непрерывны. Эту топологию будем обозначать через τ_{iv}.
(3)* Докажите, что если I не более чем счетно, то $\tau_{\mathrm{iv}} = \tau_{\mathrm{ivc}}$. (*Указание*: достаточно установить, что базу окрестностей нуля в τ_{iv} образуют множества вида $\sum_i \varphi_i(U_i)$, где $U_i \subset X_i$ — окрестность нуля.)
(4)* Приведите пример ситуации, когда I несчетно и $\tau_{\mathrm{iv}} \neq \tau_{\mathrm{ivc}}$. (*Указание*: можно рассмотреть сильнейшую локально выпуклую топологию на векторном пространстве несчетной размерности.)
(5) Приведите пример ситуации, когда I конечно и $\tau_{\mathrm{i}} \neq \tau_{\mathrm{iv}}$.

4.5. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство ненулевых локально выпуклых пространств. Докажите, что
(1) $\prod_{i\in I} X_i$ хаусдорфово $\iff$ все X_i хаусдорфовы;
(2) $\prod_{i\in I} X_i$ нормируемо $\iff$ все X_i нормируемы, и I конечно;
(3) $\prod_{i\in I} X_i$ метризуемо $\iff$ все X_i метризуемы, и I не более чем счетно.

4.6. (1) Докажите, что произведение семейства локально выпуклых пространств является их произведением как объектов категории локально выпуклых пространств.

(2) Докажите, что в категории нормированных пространств бесконечное семейство ненулевых пространств не имеет произведения.

4.7. Пусть X — векторное пространство с проективной топологией, порожденной семейством линейных отображений $(\varphi_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$, где $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $\varphi_i(B)$ ограничено в X_i для всех $i \in I$. В частности, подмножество $B \subset \prod_{i\in I} X_i$ ограничено тогда и только тогда, когда $B \subset \prod_{i\in I} B_i$, где $B_i \subset X_i$ — ограниченные подмножества.

4.8. Пусть X — локально компактное топологическое пространство со счетной базой, $C_c(X)$ — пространство финитных непрерывных функций на X с канонической индуктивной топологией. Обозначим через $C(X)_+$ множество всех неотрицательных непрерывных функций на X. Для каждого $a \in C(X)_+$ введем полунорму $\|\cdot\|_a$ на пространстве $C_c(X)$, полагая $\|f\|_a = \sup_{x\in X} |f(x)|a(x)$. Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_a : a \in C(X)_+\}$ является определяющим для $C_c(X)$.

4.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $C_c^\infty(U)$ — пространство финитных гладких функций на U с канонической индуктивной топологией. Обозначим через $\mathscr{V}$ множество всех наборов вида $v = (v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$, где $v_\alpha \in C(U)_+$ и семейство $(\operatorname{supp} v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$ локально конечно. Для каждого $v = (v_\alpha) \in \mathscr{V}$ введем полунорму $\|\cdot\|_v$ на $C_c^\infty(U)$, полагая

$$\|f\|_v = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)| v_\alpha(x).$$

Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_v : v \in \mathscr{V}\}$ является определяющим для $C_c^\infty(U)$.