Каждый сдающий индивидуально получает 8 задач, часть которых содержится в приведенном ниже списке, а другая часть — в списках задач к лекциям (см. страницу курса на `vyshka.math.ru`). Из этих 8 задач для получения максимальной оценки в 10 баллов достаточно полностью решить 6 задач. В решениях можно ссылаться на утверждения, доказанные или сформулированные в лекциях.

E.1. Для функции $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$ обозначим через $(c_n(f))$ последовательность ее коэффициентов Тейлора в нуле. Докажите, что множество $B \subset \mathscr{O}(\mathbb{C})$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такая функция $g \in \mathscr{O}(\mathbb{C})$, что $|c_n(f)| \leqslant |c_n(g)|$ для всех n и всех $f \in B$.

E.2. Пусть X — локально выпуклое пространство и $U \subset X$ — абсолютно выпуклое множество, содержащее 0. Положим $\operatorname{Ker} U = \bigcap_{\lambda>0} \lambda U$.
(a) Докажите, что $\operatorname{Ker} U$ — замкнутое векторное подпространство в X.
(b) Докажите, что U является слабой окрестностью нуля тогда и только тогда, когда U — окрестность нуля и $\operatorname{Ker} U$ имеет конечную коразмерность в X.

E.3. Пусть $C_b(\mathbb{R})$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ и $C_0(\mathbb{R})$ — подпространство в $C_b(\mathbb{R})$, состоящее из функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Для каждой $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ введем полунорму $\|\cdot\|_\varphi$ на $C_b(\mathbb{R})$, полагая $\|f\|_\varphi = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|$. Докажите, что пространство $C_b(\mathbb{R})$ с топологией, порожденной семейством полунорм $\{\|\cdot\|_\varphi : \varphi \in C_0(\mathbb{R})\}$, полно и неметризуемо.

E.4. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство. Докажите, что пространство X'_σ секвенциально полно, но не полно. Опишите его пополнение.

E.5. Пусть s — пространство быстро убывающих последовательностей.
(a) Постройте изоморфизм векторных пространств

$$s' \cong \Big\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| n^{-k} < \infty \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\Big\},$$
$$F \mapsto (x_n(F) = F(e_n)),$$

где e_n — последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных.
(b) Отождествим s' с пространством последовательностей указанным выше способом. Докажите, что следующие топологии на s' совпадают:

(i) сильная топология $\beta(s', s)$;
(ii) топология локально выпуклого прямого предела банаховых пространств $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, где

$$X_k = \Big\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|'_k = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n^{-k} < \infty\Big\};$$

(iii) топология, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_p : p \in P\}$, где P — множество всех неотрицательных последовательностей из s, а полунорма $\|\cdot\|_p$ определена формулой $\|x\|_p = \sum_n |x_n| p_n$.

E.6. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathscr{O}(\mathbb{D})$ — пространство голоморфных функций в $\mathbb{D}$.
(a) Постройте изоморфизм векторных пространств

$$\mathscr{O}(\mathbb{D})' \cong \Big\{x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+} : \varlimsup_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} < 1\Big\},$$
$$F \mapsto (x_n(F) = F(z^n/n!)).$$

(b) Отождествим $\mathscr{O}(\mathbb{D})'$ с пространством последовательностей указанным выше способом. Докажите, что следующие топологии на $\mathscr{O}(\mathbb{D})'$ совпадают:

(i) сильная топология $\beta(\mathscr{O}(\mathbb{D})', \mathscr{O}(\mathbb{D}))$;

(ii) топология локально выпуклого прямого предела банаховых пространств $(X_r)_{r\in(0,1)}$, где

$$X_r = \Big\{ x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+} : \|x\|_r = \sup_{n\geqslant 0} |x_n| r^{-n} < \infty \Big\};$$

(iii) топология, порожденная семейством полунорм $\{\|\cdot\|_p : p \in P\}$, где P — множество всех таких последовательностей $p = (p_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ неотрицательных чисел, что для каждого $r \in (0,1)$ последовательность $(p_n r^n)$ ограничена, а полунорма $\|\cdot\|_p$ определена формулой $\|x\|_p = \sum_n |x_n| p_n$.

E.7. Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство, X'_β — его сильное сопряженное. Выберем базу $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X так, чтобы $U_{n+1} \subseteq U_n$ для всех n, и для каждого n положим $B_n = U_n^\circ$.

(a) Докажите, что для каждого ограниченного множества $B \subset X'_\beta$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $B \subseteq B_n$.

(b) Докажите, что если X ненормируемо, то X'_β неметризуемо.

E.8. Пусть X — локально выпуклое пространство. Предположим, что на пространстве X' существует топология, превращающая X' в топологическое векторное пространство и такая, что спаривание $X' \times X \to \mathbb{K}$ непрерывно. Докажите, что X полунормируемо.

E.9. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть e_i — последовательность с единицей на i-м месте и нулем на остальных. Зафиксируем $p > 1$. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ в пространстве $\ell^1 \otimes \ell^p$ справедливы равенства

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \Big\|_\pi = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \quad \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \Big\|_\varepsilon = \Big(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \Big)^{1/p}.$$

Как следствие, тождественное отображение $\ell^1 \otimes_\pi \ell^p \to \ell^1 \otimes_\varepsilon \ell^p$ не является топологическим изоморфизмом.

E.10. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть $e_i \in \ell^2$ — последовательность с единицей на i-м месте и нулем на остальных. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ справедливы равенства

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \Big\|_\pi = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \quad \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \otimes e_i \Big\|_\varepsilon = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i|.$$

Как следствие, тождественное отображение $\ell^2 \otimes_\pi \ell^2 \to \ell^2 \otimes_\varepsilon \ell^2$ не является топологическим изоморфизмом.

E.11. Пусть X — ядерное борнологическое локально выпуклое пространство, (f_n) — сходящаяся к нулю последовательность в X'_σ. Докажите, что существуют непрерывная полунорма p на X и сходящаяся к нулю последовательность (ε_n) положительных чисел, такие, что $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n p(x)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$.