

Меры

2.1. Пусть X — множество, $\rho: X \rightarrow [0, +\infty)$ — произвольная функция. Определим меру μ на 2^X формулой

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B \subset A \text{ конечно}} \sum_{x \in B} \rho(x).$$

- (а) Докажите, что μ — σ -аддитивная мера на 2^X . При каком условии на ρ мера μ (b) конечна?
(с) σ -конечна?

2.2. Пусть X — множество, $\mathcal{A}$ — алгебра его подмножеств, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ — σ -аддитивная мера. Верно ли, что для любой цепочки множеств $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, такой, что все $B_n \in \mathcal{A}$ и $\bigcap_n B_n \in \mathcal{A}$, выполнено условие $\mu(\bigcap_n B_n) = \lim_n \mu(B_n)$? (При условии $\mu(B_1) < \infty$ это верно — см. лекцию.)

2.3. Пусть μ — конечная мера на алгебре $\mathcal{A} \subset 2^X$. Докажите, что

- (а) если $A, B \in \mathcal{A}$ и $\mu(A \triangle B) = 0$, то $\mu(A) = \mu(B)$;
(b) бинарное отношение на $\mathcal{A}$, определенное правилом $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$, является отношением эквивалентности;
(с) функция $\rho(A, B) = \mu(A \triangle B)$ является корректно определенной метрикой на фактормножестве $\mathcal{A} / \sim$.

Определение 2.1. Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность подмножеств множества X . Ее *верхний предел* $\overline{\lim} A_n$ и *нижний предел* $\underline{\lim} A_n$ определяются формулами $\overline{\lim} A_n = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$, $\underline{\lim} A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$. Иначе говоря, $\overline{\lim} A_n$ состоит из тех точек, которые входят в бесконечное число A_n -ых, а $\underline{\lim} A_n$ — из тех точек, которые входят во все A_n , начиная с некоторого. В частности, всегда $\underline{\lim} A_n \subseteq \overline{\lim} A_n$. Последовательность (A_n) будем называть *сходящейся*, если $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$.

2.4. Пусть μ — конечная σ -аддитивная мера на σ -алгебре множеств $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$.

- (а) Докажите, что $\mu(\underline{\lim} A_n) \leq \underline{\lim} \mu(A_n)$ и $\mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim} \mu(A_n)$.
(b) Докажите, что если (A_n) сходится, то $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.
(с) Докажите, что условие п. (b) эквивалентно σ -аддитивности μ .
(d) (*лемма Бореля–Кантелли*). Докажите, что если $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(\lim A_n) = 0$. (Вероятностная интерпретация: если ряд из вероятностей событий сходится, то с вероятностью единица может произойти лишь конечное число этих событий.)

Определение 2.2. Семейство подмножеств $\mathcal{K}$ множества X называется *компактным классом*, если для любой последовательности (K_n) множеств из $\mathcal{K}$ со свойством $\bigcap K_n = \emptyset$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\bigcap_{n \leq N} K_n = \emptyset$.

2.5. Пусть μ — конечная мера на алгебре $\mathcal{A} \subset 2^X$. Предположим, что существует такой компактный класс $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, что для каждого $A \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\mu(A) = \sup_{K \in \mathcal{K}, K \subset A} \mu(K)$.

- (а) Докажите, что μ σ -аддитивна.
(b) Получите отсюда еще одно доказательство σ -аддитивности меры Лебега на алгебре подмножеств куба $[a, b]^n$, порожденной произведениями одномерных промежутков.

2.6. (*Меры Лебега–Стилтьеса*). Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств $\mathbb{R}$, порожденная всеми полуинтервалами вида $(a, b]$ и $(a, +\infty)$ ($-\infty \leq a \leq b < +\infty$). Пусть $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неубывающая функция.

- (а) Положим $F(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)$. Докажите, что на $\mathcal{A}$ существует единственная мера μ_F , такая, что $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ и $\mu_F((a, +\infty)) = F(+\infty) - F(a)$ (где $-\infty \leq a \leq b < +\infty$.)

(b) Какой функции F соответствует мера Лебега? Мера Дирака? Мера $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$, где $\{x_n\}$ — произвольное счетное подмножество $\mathbb{R}$, а (p_n) — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию $\sum_n p_n < \infty$?

(c) Придумайте условие на функцию F , необходимое и достаточное для того, чтобы μ_F была σ -аддитивной.