

## Измеримые пространства и отображения

Для множества  $X$  через  $2^X$  обозначается семейство всех его подмножеств. Характеристическая (индикаторная) функция  $\chi_A$  множества  $A \subset X$  определяется формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

**1.1.** Пусть  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  — поле из двух элементов. Для произвольного множества  $X$  обозначим через  $\mathbb{F}_2^X$  множество всех функций на  $X$  со значениями в  $\mathbb{F}_2$ .

**(а)** Пусть  $A, B \subset X$ . Характеристическими функциями каких множеств являются функции  $\chi_A + \chi_B$  и  $\chi_A \chi_B$ ? (Сложение и умножение функций здесь понимаются как поточечные операции в  $\mathbb{F}_2^X$ .)

**(б)** Докажите, что семейство  $\mathcal{A} \subset 2^X$  является алгеброй множеств тогда и только тогда, когда его образ в  $\mathbb{F}_2^X$  при биекции  $2^X \cong \mathbb{F}_2^X$ ,  $A \mapsto \chi_A$ , является  $\mathbb{F}_2$ -подалгеброй в  $\mathbb{F}_2^X$ .

Семейство множеств  $\mathcal{F} \subset 2^X$  называется *полуалгеброй*, если оно содержит пустое множество, замкнуто относительно конечных пересечений, и для каждого  $A \in \mathcal{F}$  множество  $X \setminus A$  представимо в виде конечного дизъюнктного объединения множеств из  $\mathcal{F}$ .

**1.2.** Пусть  $X$  и  $Y$  — множества,  $\mathcal{F}_1$  и  $\mathcal{F}_2$  — полуалгебры подмножеств  $X$  и  $Y$  соответственно. Покажите, что семейство множеств  $\{A \times B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$  — полуалгебра подмножеств  $X \times Y$ .

**1.3.** Докажите, что каждый из следующих классов множеств порождает борелевскую  $\sigma$ -алгебру на  $\mathbb{R}$ : **(а)**  $\{(a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; **(б)**  $\{[a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; **(с)**  $\{(a, b] : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; **(д)**  $\{[a, b) : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ; **(е)**  $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ ; **(ф)**  $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$ ; **(г)**  $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$ ; **(х)**  $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}$ .

**1.4.** Порождается ли борелевская  $\sigma$ -алгебра на  $\mathbb{R}^2$  всевозможными **(а)** замкнутыми квадратами со сторонами, параллельными координатным осям; **(б)** замкнутыми квадратами с центром в нуле; **(с)** отрезками?

**1.5.** Пусть  $X$  — множество,  $\mathcal{F} \subset 2^X$  — произвольное семейство его подмножеств и  $\mathcal{A}$  — порожденная этим семейством  $\sigma$ -алгебра. Докажите, что каждое множество из  $\mathcal{A}$  входит в  $\sigma$ -алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным подсемейством в  $\mathcal{F}$ .

**1.6.** Докажите, что бесконечная  $\sigma$ -алгебра имеет мощность не менее континуума.

**1.7.** Обозначим через  $W$  несчетное вполне упорядоченное множество, обладающее тем свойством, что для всякого  $\alpha \in W$  множество  $\{\beta \in W : \beta < \alpha\}$  не более чем счетно<sup>1</sup>. Наименьший элемент множества  $W$  обозначим через 0. Пусть теперь  $X$  — произвольное множество и  $\mathcal{F}$  — семейство его подмножеств, содержащее пустое множество. Для каждого  $\alpha \in W$  определим семейство подмножеств  $\mathcal{B}_\alpha$  множества  $X$  следующим образом<sup>2</sup>. Положим  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F} \cup \{X \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$ .

<sup>1</sup>Существование такого  $W$  и его единственность (с точностью до порядкового изоморфизма) мы примем на веру; впрочем, их нетрудно доказать в качестве упражнения, пользуясь фактами о вполне упорядоченных множествах, доказанными в курсе «Введение в дискретную математику и топологию». Для знакомых с ординалами: порядковый тип множества  $W$  — это первый несчетный ординал.

<sup>2</sup>Корректность этого построения обеспечена принципом трансфинитной индукции (или, точнее, трансфинитной рекурсии); прочитать о нем можно, например, в книге Верещагина и Шеня «Начала теории множеств».

Предположим, что для некоторого  $\alpha \in W$  семейство  $\mathcal{B}_\beta \subset 2^X$  определено для всех  $\beta < \alpha$ , и положим  $\mathcal{B}_\alpha = \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta \right\}$ . Наконец, положим  $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in W} \mathcal{B}_\alpha$ .

(а) Докажите, что  $\mathcal{B}$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная  $\mathcal{F}$ . В частности, если  $X$  — топологическое пространство и  $\mathcal{F}$  — семейство всех его открытых подмножеств, то  $\mathcal{B}$  — борелевская  $\sigma$ -алгебра.

(б) Докажите, что  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств  $\mathbb{R}^n$  имеет мощность континуума.

**1.8.** Докажите, что всякая монотонная функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  является борелевской.

**1.9.** Пусть  $(f_n)$  — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве  $(X, \mathcal{A})$  со значениями в  $\mathbb{R}$ . Докажите, что множество  $\{x \in X : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$  лежит в  $\mathcal{A}$ .

**1.10.** Пусть  $(X, \mathcal{A})$  — измеримое пространство и  $(A_t)_{t \in \mathbb{R}}$  — семейство множеств из  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющее условиям  $A_s \subset A_t$  при  $s < t$ ,  $\bigcap_t A_t = \emptyset$  и  $\bigcup_t A_t = X$ . Докажите, что существует измеримая функция  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что для каждого  $t \in \mathbb{R}$  справедливы неравенства  $f(x) \leq t$  для  $x \in A_t$  и  $f(x) \geq t$  для  $x \notin A_t$ .