Произведения мер. Теорема Фубини–Тонелли

9.1. В какие утверждения превращаются теоремы Тонелли и Фубини, если одно из перемножаемых пространств — множество натуральных чисел со считающей мерой? Сформулируйте их так, чтобы в формулировках не участвовали произведения пространств с мерой.

9.2 (*интеграл как площадь под графиком*)**.** Пусть $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой и $f\colon X \to [0, +\infty)$ — измеримая функция. Обозначим через $\mathscr{B}or(\mathbb{R})$ борелевскую σ-алгебру и через λ меру Лебега на $\mathbb{R}$. Докажите, что множество $E_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ лежит в $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}or(\mathbb{R})$, и что $(\mu \otimes \lambda)(E_f) = \int_X f\, d\mu$.

9.3. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$, что интегралы

$$\int_X \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\mu(y), \qquad \int_X \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(y) \right) d\mu(x) \tag{1}$$

существуют, но не равны друг другу, для следующих двух случаев: **(a)** $X = \mathbb{N}$, μ — считающая мера; **(b)** $X = [0, 1]$, μ — мера Лебега. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

9.4. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$, что один из интегралов (1) существует, а другой — нет, для тех же двух пространств с мерой, что в предыдущей задаче. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

9.5. Постройте пример такой измеримой функции $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$, что оба интеграла (1) существуют и равны друг другу, но f не интегрируема на $X \times X$, для тех же двух пространств с мерой, что в задаче 9.3. Какое условие теоремы Фубини при этом нарушается?

9.6. Пусть $X = Y = [0, 1]$, μ — мера Лебега на $\mathscr{B}or([0, 1])$, ν — считающая мера на $2^{[0,1]}$, $\Delta = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$, $f = \chi_\Delta$. Вычислите интегралы

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y), \qquad \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x), \qquad \int_{X \times Y} f(x, y)\, d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

Какое условие теоремы Тонелли и принципа Кавальери при этом нарушается?

9.7. Пусть $X = [0, \omega_1)$ (где ω_1 — первый несчетный ординал), $\mathscr{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра, состоящая из таких множеств $A \subset X$, что либо A, либо его дополнение не более чем счетно. Определим меру μ на $\mathscr{A}$, полагая $\mu(A) = 0$ и $\mu(X \setminus A) = 1$ для не более чем счетных A. Положим $E = \{(x, y) \in X \times X : x < y\}$ и $f = \chi_E$. Вычислите интегралы (1). Какое условие теоремы Тонелли и принципа Кавальери при этом нарушается?

9.8. Пусть μ — конечная борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, и пусть $0 < p < n$. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\mu(x)}{\|x - y\|^p} < \infty$$

для почти всех (относительно меры Лебега) $y \in \mathbb{R}^n$.