Соглашение. Всюду ниже $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и $(X, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой.

Пространства L^p

8.1. Докажите, что для измеримой функции $f\colon X \to [0, +\infty]$ следующие определения ее *существенной верхней грани* $\operatorname{ess\,sup} f$ эквивалентны:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess\,sup} f = \inf \left\{ C \geqslant 0 : f(x) \leqslant C \text{ п.в. } \right\}, \\ &\operatorname{ess\,sup} f = \inf \left\{ \sup_{x\in E} f(x) : E \in \mathscr{A},\ \mu(X \setminus E) = 0 \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

(здесь мы полагаем $\inf \varnothing = +\infty$), и что inf в обеих формулах (1) достигается.

8.2. (a) Докажите, что для непрерывной функции $f\colon [a, b] \to [0, +\infty]$ справедливо равенство $\operatorname{ess\,sup} f = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
(b) При каком разумном условии на борелевскую меру μ на топологическом пространстве X утверждение (a) справедливо для непрерывных функций на X?

Определение 8.1. Измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ называется *существенно ограниченной*, если существует такое множество $E \in \mathscr{A}$, что $\mu(X \setminus E) = 0$ и f ограничена на E.

Множество всех существенно ограниченных измеримых функций на X обозначается через $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$. Из (1) следует, что измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{K}$ существенно ограничена тогда и только тогда, когда $\operatorname{ess\,sup} |f| < \infty$.

8.3. Докажите, что $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — векторное подпространство в $\mathbb{K}^X$, и что формула $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$ задает полунорму на $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.

Нормированное пространство, ассоциированное с $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ (см. лекции), обозначается через $L^\infty(X, \mu)$. Таким образом,

$$L^\infty(X, \mu) = \mathscr{L}^\infty(X, \mu)/\{f : \|f\|_\infty = 0\} = \mathscr{L}^\infty(X, \mu)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\},$$

а норма элемента $f \in L^\infty(X, \mu)$ определяется как полунорма любого его представителя из $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$. Как и в случае пространств $L^p(X, \mu)$ при $p < \infty$, удобно интерпретировать элементы $L^\infty(X, \mu)$ как «функции с точностью до равенства п.в.».

8.4. Докажите, что $L^\infty(X, \mu)$ полно.

8.5. Пусть μ — считающая мера на $2^{\mathbb{N}}$. Положим $\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu)$ (или, что в данном случае то же самое, $\mathscr{L}^p(\mathbb{N}, \mu)$) для $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Дайте прямое определение пространств ℓ^p, не использующее интегралов.

8.6. Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Покажите, что
(a) $\ell^p \subset \ell^q$, но $\ell^p \neq \ell^q$, причем $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$ для всех $x \in \ell^p$; как следствие, вложение $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ непрерывно;
(b) если $\mu(X) < \infty$, то $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$, причем существует такое $C > 0$, что $\|f\|_p \leqslant C\|f\|_q$ для всех $f \in L^q(X, \mu)$; как следствие, вложение $L^q(X, \mu) \hookrightarrow L^p(X, \mu)$ непрерывно;
(c) для $X = [0, 1]$ с мерой Лебега включение из п. (b) строгое;
(d) $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$ и $L^q(\mathbb{R}) \not\subset L^p(\mathbb{R})$.

8.7. Предположим, что $\mu(X) < \infty$. Докажите, что $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p$ для любой $f \in L^\infty(X, \mu)$.

8.8. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Положим $S(X, \mathscr{A}) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A}\}$ и $S_0(X, \mathscr{A}) = \operatorname{span}\{\chi_A : A \in \mathscr{A},\ \mu(A) < \infty\}$.
(a) Покажите, что $S_0(X, \mathscr{A}) = S(X, \mathscr{A}) \cap \mathscr{L}^p(X, \mu)$.
(b) Пусть $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ — подалгебра. Предположим, что для каждого множества $A \in \mathscr{A}$ конечной меры и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathscr{B}$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Докажите, что $S_0(X, \mathscr{B})$ плотно в $\mathscr{L}^p(X, \mu)$.

8.9. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что
(a) пространство ступенчатых функций (т.е. линейных комбинаций функций вида χ_I, где $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток) плотно в $L^p[a, b]$;
(b) $C^\infty[a, b]$ плотно в $L^p[a, b]$;
(c) пространство линейных комбинаций функций вида χ_I, где $I \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченный стандартный параллелепипед, плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$;
(d) пространство $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладких функций с компактным носителем плотно в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

8.10. **(a)** Докажите, что $S(X, \mathscr{A})$ плотно в $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.
(b) Сохраняет ли силу какое-нибудь из утверждений упражнения 8.9 для $p = \infty$?