Соглашение. Всюду ниже $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Интеграл Лебега II. Сходимость измеримых функций

7.1 (*непрерывность и дифференцируемость интеграла по параметру*)**.** Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, и пусть функция $f\colon X \times I \to \mathbb{K}$ такова, что для каждого $t \in I$ функция $x \mapsto f(x,t)$ интегрируема на X. Положим $F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x)$.
(a) Предположим, что для каждого $x \in X$ функция $t \mapsto f(x,t)$ непрерывна на I, и что существует такая интегрируемая функция $g\colon X \to [0, +\infty)$, что $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$, $t \in I$. Докажите, что F непрерывна.
(b) Предположим, что для каждого $x \in X$ функция $t \mapsto f(x,t)$ дифференцируема на I, и что существует такая интегрируемая функция $g\colon X \to [0, +\infty)$, что $|f'_t(x,t)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$, $t \in I$. Докажите, что F дифференцируема и $F'(t) = \int_X f'_t(x,t)\, d\mu(x)$ для всех $t \in I$.

7.2. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f\colon X \to \mathbb{K}$ — измеримые функции.
(a) Верно ли, что из поточечной сходимости (f_n) к f следует сходимость (f_n) к f по мере?
(b) Верно ли, что из равномерной сходимости (f_n) к f следует сходимость (f_n) к f по мере?
(c) Предположим, что все f_n и f интегрируемы. Верно ли, что из равномерной сходимости (f_n) к f следует сходимость (f_n) к f в $L^1(X, \mu)$?
(*Напоминание:* для $\mu(X) < \infty$ все эти утверждения верны — см. лекцию.)

7.3. Постройте последовательность (f_n) неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к 0 в $L^1[0,1]$, и такой, что числовая последовательность $(f_n(x))$ не имеет предела ни для одного $x \in [0,1]$.

7.4. Постройте последовательность (f_n) неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к 0 по мере Лебега, но не имеющей предела в $L^1[0,1]$ и такой, что числовая последовательность $(f_n(x))$ не имеет предела ни для одного $x \in [0,1]$.

7.5. Может ли последовательность функций из задачи 6.6 иметь предел в $L^1[0,1]$?

7.6. Пусть (f_n) и (g_n) — последовательности измеримых функций на пространстве с мерой (X, μ), сходящиеся по мере к измеримым функциям f и g соответственно. Докажите, что
(a) последовательность $(f_n + g_n)$ сходится по мере к $f + g$;
(b) если $\mu(X) < \infty$, то последовательность $(f_n g_n)$ сходится по мере к fg.
Верно ли утверждение (b) без условия $\mu(X) < \infty$?

7.7. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X, \mu)$ пространство классов эквивалентности (здесь эквивалентность — это равенство μ-п.в.) измеримых функций на X. Зафиксируем неубывающую ограниченную непрерывную функцию $\psi\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, такую, что $\psi(0) = 0$, ψ строго возрастает в некоторой окрестности нуля, и $\psi(s+t) \leqslant \psi(s) + \psi(t)$ для всех s, t. (Например, можно положить $\psi(t) = t/(1+t)$ или $\psi(t) = \min\{1, t\}$.) Докажите, что формула $\rho(f, g) = \int_X \psi(|f - g|)\, d\mu$ определяет метрику на $L^0(X, \mu)$, и что сходимость по этой метрике равносильна сходимости по мере.

7.8. Докажите, что на пространстве $L^0[0,1]$ нет топологии, сходимость в которой совпадала бы со сходимостью почти всюду.