Соглашение. Всюду ниже $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Интеграл Лебега

6.1. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой, $A_1, \ldots, A_n$ — измеримые подмножества X, причем каждая точка X принадлежит не менее чем k множествам из набора $A_1, \ldots, A_n$. Докажите, что $k\mu(X) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

6.2. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой, $f\colon X \to \mathbb{K}$ — измеримая функция. Докажите, что f интегрируема тогда и только тогда, когда $\sum_n \mu\{x \in X : |f(x)| \geqslant n\} < \infty$.

6.3. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, f — интегрируемая функция на X со значениями в $[0, +\infty]$ или в $\mathbb{K}$. Докажите, что множество $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ σ-конечно относительно μ (т.е. является счетным объединением множеств конечной меры).

6.4. Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — интегрируемые функции. Докажите, что функции $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ интегрируемы.

6.5. Верно ли, что если функция $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, то и функция f^2 интегрируема?

6.6. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0, 1]$, поточечно сходящейся к нулю, интегралы которых равны 1. (Этот пример показывает, что теорема о монотонной сходимости неверна без предположения о монотонности, теорема о мажорированной сходимости неверна без предположения о существовании интегрируемой мажоранты, а неравенство $\int (\underline{\lim}\, f_n)\, d\mu \leqslant \underline{\lim} \int f_n\, d\mu$ из теоремы Фату может быть строгим.)

6.7. Приведите пример последовательности (f_n) ограниченных $\mathbb{R}$-значных борелевских функций на $[0, 1]$, для которых числовая последовательность $\left\{\int_0^1 f_n\, dx\right\}$ ограничена, и которые поточечно сходятся к неинтегрируемой функции. (Этот пример показывает, что теорема Фату неверна без предположения о неотрицательности функций.)

6.8. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ — интегрируемая функция. Докажите, что $\sum_n |f(x+n)| < +\infty$ для почти всех $x \in \mathbb{R}$.

6.9. Пусть $c\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — канторова лестница. Вычислите интегралы: **(a)** $\int_0^1 c(x)\, dx$; **(b)** $\int_0^1 x\, d\mu_c(x)$, где μ_c — мера Стилтьеса на $[0, 1]$, соответствующая функции c.

6.10. Приведите пример ограниченной измеримой по Лебегу функции на $[0, 1]$, не совпадающей почти всюду ни с какой функцией, интегрируемой по Риману. (Таким образом, интегрируемых по Лебегу функций на отрезке «существенно больше», чем интегрируемых по Риману.)

6.11. Приведите пример непрерывной, но не интегрируемой по Лебегу функции на $[0, +\infty)$, для которой существует несобственный интеграл $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, dx$.