Меры Хаусдорфа

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $p \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого $A \subset X$ положим

$$\mathscr{H}^p_\varepsilon(A) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^p : A \subset \bigcup_i A_i,\ A_i \subset X,\ \operatorname{diam} A_i \leqslant \varepsilon\Big\} \in [0,+\infty]$$

(здесь мы полагаем по определению $0^0 = 1$). Заметим, что функция $\varepsilon \mapsto \mathscr{H}^p_\varepsilon(A)$ не возрастает.

Определение 5.1. Величина

$$\mathscr{H}^p(A) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathscr{H}^p_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon>0} \mathscr{H}^p_\varepsilon(A)$$

называется *p-мерной внешней мерой Хаусдорфа* множества A.

5.1. Что такое $\mathscr{H}^0(A)$?

5.2. Докажите, что в определении меры Хаусдорфа
(a) можно заменить X на A (т.е. рассматривать A как подмножество себя самого);
(b) можно считать A_i замкнутыми подмножествами в X;
(c) если $X = \mathbb{R}^n$, то можно считать A_i выпуклыми множествами.

5.3. Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Докажите, что $\mathscr{H}^1(A) = \mathscr{H}^1_\varepsilon(A) = \lambda_1^*(A)$ для любого $\varepsilon > 0$ (где λ_1^* — внешняя мера Лебега на $2^{\mathbb{R}}$).

5.4. Докажите, что $\mathscr{H}^p$ — внешняя мера на 2^X (в смысле Каратеодори).

5.5. Пусть отображение $f\colon X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C \geqslant 0$. Докажите, что $\mathscr{H}^p(f(A)) \leqslant C^p \mathscr{H}^p(A)$ для всех $A \subset X$. В частности, если f — изометрия X на $f(X)$, то f сохраняет внешнюю меру Хаусдорфа.

5.6. (a) Пусть τ — какая-либо внешняя мера на 2^X, обладающая тем свойством, что $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$ при условии, что $\inf\{\rho(x,y) : x \in A,\ y \in B\} > 0$. Докажите, что все борелевские множества τ-измеримы.
(b) Докажите, что $\tau = \mathscr{H}^p$ удовлетворяет условию, указанному в (a). Как следствие, $\mathscr{H}^p$ — σ-аддитивная мера на $\mathscr{B}or(X)$.

Указание. **(a)** Для доказательства измеримости открытого множества U представьте его в виде объединения последовательности множеств $U_n = \{x \in X : \rho(x, X \setminus U) > 1/n\}$ и докажите, что $\tau(E \cap U_n) \to \tau(E \cap U)$ для любого E, пользуясь тем, что множества $U_n \setminus U_{n-1}$ и $U_{n+2} \setminus U_{n+1}$ удовлетворяют указанному в (a) условию.

5.7. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что существует такая константа $c_n > 0$, что $\mathscr{H}^n(A) = c_n \lambda_n^*(A)$ (где λ_n^* — внешняя мера Лебега на $2^{\mathbb{R}}$). (На самом деле $c_n = 2^n/\alpha_n$, где α_n — объем n-мерного шара радиуса 1; но это уже довольно трудная теорема.)

Указание. Докажите равенство сначала для борелевского A, а затем воспользуйтесь тем, что для произвольного A найдется такое борелевское $B \supset A$, что $\mathscr{H}^n(A) = \mathscr{H}^n(B)$ и $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(B)$.

5.8. Докажите, что для каждого метрического пространства X существует такое $d \in [0,+\infty]$, что $\mathscr{H}^p(X) = \infty$ при $p < d$ и $\mathscr{H}^p(X) = 0$ при $p > d$.

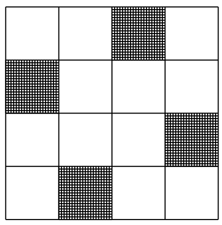
Определение 5.2. Число d, фигурирующее в упражнении 5.8, называется *хаусдорфовой размерностью* пространства X и обозначается $\dim_H X$.

5.9. Докажите, что
(a) если $A \subset B$, то $\dim_H A \leqslant \dim_H B$;
(b) $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) = \sup_i \dim_H X_i$;
(c) если $f\colon X \to Y$ — липшицево отображение, то $\dim_H f(X) \leqslant \dim_H X$. В частности, если X и Y билипшицево изоморфны (т.е. между ними существут биекция, липшицева в обе стороны), то $\dim_H X = \dim_H Y$.

5.10. Докажите, что для любого $A \subseteq \mathbb{R}^n$
(a) $\dim_H A \leqslant n$;
(b) если $\lambda_n^*(A) > 0$, то $\dim_H A = n$.

5.11. (a) Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — липшицева функция, $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$ — ее график. Докажите, что $\dim_H \Gamma_f = 1$.
(b) Докажите, что хаусдорфова размерность любой гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$ равна 1.
(c) Докажите, что хаусдорфова размерность любого гладкого k-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ равна k.

5.12. Пусть D_0 — замкнутый квадрат на плоскости со стороной 1. Разобьем его отрезками, параллельными сторонам, на 16 равных квадратов, и обозначим через D_1 множество, составленное из четырех квадратов, заштрихованнных на следующем рисунке:



Далее проделаем ту же процедуру с каждым из квадратов, составляющих множество D_1; в итоге получим множество D_2. Продолжая в том же духе, получим убывающую последовательность компактных множеств (D_n). Множество $D = \bigcap_n D_n$ называется *канторовой пылью*. Вычислите $\dim_H D$.

5.13. Вычислите хаусдорфову размерность канторова множества.

5.14. Докажите, что для любого $p \in (0,1)$ существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}$, что $\dim_H K = p$, причем **(a)** $0 < \mathscr{H}^p(K) < \infty$; **(b)** $\mathscr{H}^p(K) = 0$; **(c)** $\mathscr{H}^p(K) = \infty$.