Мера Лебега II

4.1. Докажите, что каждое измеримое по Лебегу подмножество в $\mathbb{R}^n$ положительной меры содержит неизмеримое подмножество.

4.2. Приведите пример непрерывной функции на отрезке, которая переводит некоторое измеримое по Лебегу множество в неизмеримое.

4.3. Приведите пример такой непрерывной функции $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, что для некоторого измеримого по Лебегу множества $A \subset [0,1]$ его прообраз $f^{-1}(A)$ неизмерим.

4.4. Выведите из предыдущей задачи существование измеримых по Лебегу множеств, не являющихся борелевскими.

4.5. Верно ли, что композиция измеримых по Лебегу функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ измерима по Лебегу?

4.6. **(a)** Пусть $\mathscr{A} \subset 2^X$ и $\mathscr{B} \subset 2^Y$ — σ-алгебры. Докажите, что для каждого множества $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ и каждых $x \in X$, $y \in Y$ множества $E_x = \{t \in Y : (x,t) \in E\}$ и $E^y = \{s \in X : (s,y) \in E\}$ лежат в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ соответственно.
(b) Обозначим через $\mathcal{M}_n$ σ-алгебру измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что $\mathcal{M}_m \otimes \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{m+n}$?

4.7. Приведите пример нерегулярной σ-аддитивной борелевской меры на $[0,1]$.

4.8. Докажите, что конечная σ-аддитивная борелевская мера на компактном метризуемом топологическом пространстве регулярна.

Указание. Семейство множеств, аппроксимируемых изнутри замкнутыми и снаружи открытыми множествами, содержит все замкнутые множества и является σ-алгеброй.

4.9. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица на каждом выпуклом компакте. Известно (см. лекции), что если $m \geqslant n$, то f переводит измеримые множества в измеримые. Верно ли это, если $m < n$?

4.10. Докажите, что график непрерывного отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, имеет меру 0.

4.11. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество положительной меры Лебега. Докажите, что для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такой интервал I, что $\lambda(A \cap I) > (1-\varepsilon)\lambda(I)$ (где λ — мера Лебега).

4.12. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество положительной меры Лебега. Докажите, что множество $A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ содержит окрестность нуля.