Продолжение мер. Мера Лебега

3.1. Найдите меру Лебега множества тех точек отрезка $[0,1]$, десятичная запись которых не содержит 1.

3.2. **(a)** Докажите, что для каждого $a \in [0,1)$ существует замкнутое нигде не плотное подмножество $K_a \subset [0,1]$ лебеговой меры a.
(b) Существует ли нигде не плотное подмножество меры 1 на отрезке $[0,1]$? Опишите все замкнутые подмножества отрезка $[0,1]$, имеющие меру 1.
(c) Докажите, что на отрезке $[0,1]$ есть тощее[1] подмножество меры 1 и подмножество меры 0, не являющееся тощим.

3.3. Верно ли, что граница любого открытого подмножества плоскости имеет меру 0?

3.4. (*Меры Лебега–Стилтьеса II*). Пусть $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию п. (c) задачи 2.6, т.е. такая, что соответствующая мера μ_F σ-аддитивна. Продолжим μ_F на σ-алгебру всех μ_F-измеримых множеств.
(a) Докажите, что все борелевские множества μ_F-измеримы, и вычислите значения μ_F на всевозможных отрезках, интервалах и полуинтервалах.
(b) Докажите, что любая σ-аддитивная борелевская мера на $\mathbb{R}$, конечная на ограниченных множествах, имеет вид μ_F для некоторой F, и что функция F определена однозначно с точностью до добавления константы.

3.5. **(a)** Две σ-аддитивные борелевские[2] меры на $\mathbb{R}^2$ принимают равные значения на всех открытых треугольниках. Верно ли, что эти меры равны? Изменится ли ответ, если вместо открытых треугольников рассматривать замкнутые?
(b) Две σ-аддитивные конечные меры на σ-алгебре $\mathscr{A}$ принимают равные значения на множествах из некоторого семейства, порождающего $\mathscr{A}$. Верно ли, что эти меры равны?

3.6. Докажите, что мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ равна точной нижней грани сумм мер открытых треугольников из счетных наборов, покрывающих A. Изменится ли ответ, если вместо открытых треугольников рассматривать замкнутые?

3.7. Докажите, что компакт положительной меры на прямой имеет мощность континуума.

3.8. Дан компакт на плоскости меры 1. Докажите, что в нем есть замкнутое подмножество меры $1/4$.

3.9. Пусть μ — мера (не обязательно σ-аддитивная) на некоторой алгебре подмножеств множества X. Обязательно ли внешняя мера на 2^X, порожденная μ, является ее продолжением?

3.10. Пусть $\mathscr{A}_0$ — алгебра подмножеств $\mathbb{Q}$, порожденная всеми полуинтервалами вида $(a,b] \cap \mathbb{Q}$ и $(a,+\infty) \cap \mathbb{Q}$ $(-\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty)$. Определим меру μ на $\mathscr{A}_0$ правилом $\mu(\varnothing) = 0$ и $\mu(A) = \infty$ для $A \neq \varnothing$.
(a) Опишите σ-алгебру $\mathscr{A}$ подмножеств $\mathbb{Q}$, порожденную $\mathscr{A}_0$.
(b) Докажите, что продолжение μ до σ-аддитивной меры на $\mathscr{A}$ не единственно. (Для σ-конечных мер таких безобразий не бывает — см. лекцию.)

---

[1] Подмножество топологического пространства X называется *тощим* (или множеством *первой категории*), если оно является объединением счетного числа нигде не плотных подмножеств X. Согласно теореме Бэра, полное метрическое пространство не является тощим подмножеством себя самого.

[2] Если X — топологическое пространство, то *борелевской мерой* на X называется мера на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}or(X)$.