Меры

2.1. Пусть X — множество, $\rho\colon X \to [0,+\infty)$ — произвольная функция. Определим меру μ на 2^X формулой

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \rho(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{B\subset A \text{ конечно}} \sum_{x\in B} \rho(x).$$

(a) Докажите, что μ — σ-аддитивная мера на 2^X. При каком условии на ρ мера μ **(b)** конечна? **(c)** σ-конечна?

2.2. Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — алгебра его подмножеств, $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ — σ-аддитивная мера. Верно ли, что для любой цепочки множеств $B_1 \supset B_2 \supset \dots$, такой, что все $B_n \in \mathscr{A}$ и $\bigcap_n B_n \in \mathscr{A}$, выполнено условие $\mu(\bigcap_n B_n) = \lim_n \mu(B_n)$? (При условии $\mu(B_1) < \infty$ это верно — см. лекцию.)

2.3. Пусть μ — конечная мера на алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$. Докажите, что
(a) если $A, B \in \mathscr{A}$ и $\mu(A \triangle B) = 0$, то $\mu(A) = \mu(B)$;
(b) бинарное отношение на $\mathscr{A}$, определенное правилом $A \sim B \iff \mu(A \triangle B) = 0$, является отношением эквивалентности;
(c) функция $\rho(A,B) = \mu(A \triangle B)$ является корректно определенной метрикой на фактормножестве $\mathscr{A}/\sim$.

Определение 2.1. Пусть $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность подмножеств множества X. Ее *верхний предел* $\overline{\lim}\, A_n$ и *нижний предел* $\underline{\lim}\, A_n$ определяются формулами $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geqslant n} A_k$, $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geqslant n} A_k$. Иначе говоря, $\overline{\lim}\, A_n$ состоит из тех точек, которые входят в бесконечное число A_n-ых, а $\underline{\lim}\, A_n$ — из тех точек, которые входят во все A_n, начиная с некоторого. В частности, всегда $\underline{\lim}\, A_n \subseteq \overline{\lim}\, A_n$. Последовательность (A_n) будем называть *сходящейся*, если $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$.

2.4. Пусть μ — конечная σ-аддитивная мера на σ-алгебре множеств $\mathscr{A} \subseteq 2^X$, $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$.
(a) Докажите, что $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant \underline{\lim}\, \mu(A_n)$ и $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geqslant \overline{\lim}\, \mu(A_n)$.
(b) Докажите, что если (A_n) сходится, то $\mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n)$.
(c) Докажите, что условие п. (b) эквивалентно σ-аддитивности μ.
(d) (*лемма Бореля–Кантелли*). Докажите, что если $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$. (Вероятностная интерпретация: если ряд из вероятностей событий сходится, то с вероятностью единица может произойти лишь конечное число этих событий.)

Определение 2.2. Семейство подмножеств $\mathscr{K}$ множества X называется *компактным классом*, если для любой последовательности (K_n) множеств из $\mathscr{K}$ со свойством $\bigcap K_n = \varnothing$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\bigcap_{n\leqslant N} K_n = \varnothing$.

2.5. Пусть μ — конечная мера на алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$. Предположим, что существует такой компактный класс $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ справедливо равенство $\mu(A) = \sup\limits_{K\in\mathscr{K},\, K\subset A} \mu(K)$.
(a) Докажите, что μ σ-аддитивна.
(b) Получите отсюда еще одно доказательство σ-аддитивности меры Лебега на алгебре подмножеств куба $[a,b]^n$, порожденной произведениями одномерных промежутков.

2.6. (*Меры Лебега–Стилтьеса*). Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств $\mathbb{R}$, порожденная всеми полуинтервалами вида $(a,b]$ и $(a,+\infty)$ $(-\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty)$. Пусть $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция.
(a) Положим $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$. Докажите, что на $\mathscr{A}$ существует единственная мера μ_F, такая, что $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ и $\mu_F((a,+\infty)) = F(+\infty) - F(a)$ (где $-\infty \leqslant a \leqslant b < +\infty$.)

(b) Какой функции F соответствует мера Лебега? Мера Дирака? Мера $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$, где $\{x_n\}$ — произвольное счетное подмножество $\mathbb{R}$, а (p_n) — последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию $\sum_n p_n < \infty$?
(c) Придумайте условие на функцию F, необходимое и достаточное для того, чтобы μ_F была σ-аддитивной.