# Измеримые пространства и отображения

Для множества $X$ через $2^X$ обозначается семейство всех его подмножеств. Характеристическая (индикаторная) функция $\chi_A$ множества $A \subset X$ определяется формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

**1.1.** Пусть $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ — поле из двух элементов. Для произвольного множества $X$ обозначим через $\mathbb{F}_2^X$ множество всех функций на $X$ со значениями в $\mathbb{F}_2$.
**(a)** Пусть $A, B \subset X$. Характеристическими функциями каких множеств являются функции $\chi_A + \chi_B$ и $\chi_A \chi_B$? (Сложение и умножение функций здесь понимаются как поточечные операции в $\mathbb{F}_2^X$.)
**(b)** Докажите, что семейство $\mathscr{A} \subset 2^X$ является алгеброй множеств тогда и только тогда, когда его образ в $\mathbb{F}_2^X$ при биекции $2^X \cong \mathbb{F}_2^X$, $A \mapsto \chi_A$, является $\mathbb{F}_2$-подалгеброй в $\mathbb{F}_2^X$.

Семейство множеств $\mathscr{F} \subset 2^X$ называется *полуалгеброй*, если оно содержит пустое множество, замкнуто относительно конечных пересечений, и для каждого $A \in \mathscr{F}$ множество $X \setminus A$ представимо в виде конечного дизъюнктного объединения множеств из $\mathscr{F}$.

**1.2.** Пусть $X$ и $Y$ — множества, $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ — полуалгебры подмножеств $X$ и $Y$ соответственно. Покажите, что семейство множеств $\{A \times B : A \in \mathscr{F}_1,\ B \in \mathscr{F}_2\}$ — полуалгебра подмножеств $X \times Y$.

**1.3.** Докажите, что каждый из следующих классов множеств порождает борелевскую $\sigma$-алгебру на $\mathbb{R}$: **(a)** $\{(a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$; **(b)** $\{[a,b] : a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$; **(c)** $\{(a,b] : a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$; **(d)** $\{[a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$; **(e)** $\{(a,+\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$; **(f)** $\{[a,+\infty) : a \in \mathbb{Q}\}$; **(g)** $\{(-\infty,a) : a \in \mathbb{Q}\}$; **(h)** $\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{Q}\}$.

**1.4.** Порождается ли борелевская $\sigma$-алгебра на $\mathbb{R}^2$ всевозможными **(a)** замкнутыми квадратами со сторонами, параллельными координатным осям; **(b)** замкнутыми квадратами с центром в нуле; **(c)** отрезками?

**1.5.** Докажите, что всякая монотонная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является борелевской.

**1.6.** Пусть $(f_n)$ — последовательность измеримых функций на измеримом пространстве $(X, \mathscr{A})$. Докажите, что множество $\{x \in X : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ лежит в $\mathscr{A}$.

**1.7.** Пусть $(X, \mathscr{A})$ — измеримое пространство и $(A_t)_{t\in\mathbb{R}}$ — семейство множеств из $\mathscr{A}$, удовлетворяющее условиям $A_s \subset A_t$ при $s < t$, $\bigcap_t A_t = \varnothing$ и $\bigcup_t A_t = X$. Докажите, что существует измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства $f(x) \leqslant t$ для $x \in A_t$ и $f(x) \geqslant t$ для $x \notin A_t$.

**1.8.** Пусть $X$ — множество, $\mathscr{F} \subset 2^X$ — произвольное семейство его подмножеств и $\mathscr{A}$ — порожденная этим семейством $\sigma$-алгебра. Докажите, что каждое множество из $\mathscr{A}$ входит в $\sigma$-алгебру, порожденную некоторым не более чем счетным подсемейством в $\mathscr{F}$.

**1.9.** Докажите, что бесконечная $\sigma$-алгебра имеет мощность не менее континуума.

**1.10.** Пусть $X$ — множество, $\mathscr{F}$ — семейство его подмножеств, содержащее пустое множество. Положим $\mathscr{B}_0 = \mathscr{F} \cup \{X \setminus A : A \in \mathscr{F}\}$, $\mathscr{B}_1 = \Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathscr{B}_0\Big\}$, $\mathscr{B}_2 = \Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \mathscr{B}_1\Big\}$, и т.д. Более общим образом, для каждого счетного ординала $\alpha$ положим $\mathscr{B}_\alpha = \Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathscr{B}_\beta\Big\}$. Наконец, положим $\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathscr{B}_\alpha$, где $\omega_1$ — первый несчетный ординал.

**(a)** Докажите, что $\mathscr{B}$ — $\sigma$-алгебра, порожденная $\mathscr{F}$. В частности, если $X$ — топологическое пространство и $\mathscr{F}$ — семейство всех его открытых подмножеств, то $\mathscr{B}$ — борелевская $\sigma$-алгебра.

**(b)** Докажите, что $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума.