1. Пусть X и Y — множества, $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ — полуалгебры подмножеств X и Y соответственно. Покажите, что семейство множеств $\{A \times B : A \in \mathscr{F}_1,\ B \in \mathscr{F}_2\}$ — полуалгебра подмножеств $X \times Y$.

2. Докажите, что $\mathscr{B}or(\mathbb{R}^n)$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй подмножеств $\mathbb{R}^n$, относительно которой измеримы все непрерывные функции с компактным носителем.

3. Пусть X — множество, $\rho\colon X \to [0,+\infty)$ — произвольная функция. Определим меру μ на 2^X формулой
$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \rho(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{B\subset A \text{ конечно}} \sum_{x\in B} \rho(x).$$
Докажите, что μ — σ-аддитивная мера на 2^X. При каком условии на ρ мера μ конечна? σ-конечна?

4. Пусть X — множество, $\mathscr{A}$ — алгебра его подмножеств, $\mu\colon \mathscr{A} \to [0,+\infty]$ — σ-аддитивная мера. Верно ли, что для любой цепочки множеств $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, такой, что все $B_n \in \mathscr{A}$ и $\bigcap_n B_n \in \mathscr{A}$, выполнено условие $\mu(\bigcap_n B_n) = \lim_n \mu(B_n)$? (При условии $\mu(B_1) < \infty$ это верно — см. лекцию.)

5. Семейство подмножеств $\mathscr{K}$ множества X называется *компактным классом*, если для любой последовательности (K_n) множеств из $\mathscr{K}$ со свойством $\bigcap K_n = \varnothing$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\bigcap_{n\le N} K_n = \varnothing$. Пусть теперь μ — конечная мера на алгебре $\mathscr{A} \subset 2^X$, причем существует такой компактный класс $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$, что для каждого $A \in \mathscr{A}$ справедливо равенство $\mu(A) = \sup_{K\in\mathscr{K},\, K\subset A} \mu(K)$.

   (a) Докажите, что μ σ-аддитивна.

   (b) Получите отсюда еще одно доказательство σ-аддитивности меры Лебега на алгебре подмножеств куба $[a,b]^n$, порожденной произведениями одномерных промежутков.

6. (a) Докажите, что для каждого $a \in [0,1)$ существует замкнутое нигде не плотное подмножество $K_a \subset [0,1]$ лебеговой меры a.

   (b) Существует ли нигде не плотное подмножество меры 1 на отрезке $[0,1]$?

   (c) Докажите, что на отрезке $[0,1]$ есть тощее[1] подмножество меры 1 и подмножество меры 0, не являющееся тощим.

7. Пусть μ — конечная положительная мера на алгебре множеств $\mathscr{A} \subset 2^X$. Докажите, что множество $A \subset X$ μ-измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X)$.

[1] Подмножество топологического пространства X называется *тощим*, если оно является объединением счетного числа нигде не плотных подмножеств X. Согласно теореме Бэра, полное метрическое пространство не является тощим подмножеством себя самого.