Сходимость измеримых функций

1. Приведите пример **(a)** поточечно сходящейся к нулю последовательности измеримых функций на прямой, не сходящейся никуда по мере; **(b)** равномерно сходящейся к нулю последовательности интегрируемых функций на прямой, не сходящейся никуда по $\mathscr{L}^1$-полунорме.

2. Приведите пример последовательности ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по мере, но не сходящейся никуда по $\mathscr{L}^1$-полунорме.

3. Приведите пример последовательности ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по $\mathscr{L}^1$-полунорме, но не сходящейся ни в одной точке.

4. Пусть (f_n) и (g_n) — последовательности измеримых функций на пространстве с мерой (X,μ), сходящиеся по мере к измеримым функциям f и g соответственно. Докажите, что $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

5. Пусть (f_n) и (g_n) — последовательности измеримых функций на пространстве с конечной мерой (X,μ), сходящиеся по мере к измеримым функциям f и g соответственно. Докажите, что $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.

6. Пусть (f_n) — последовательность измеримых функций на пространстве с мерой (X,μ). Предположим, что для некоторой измеримой функции f и для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \ge \alpha_n\} \le \beta_n$, где (α_n) и (β_n) — последовательности положительных чисел, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\sum_n \beta_n < \infty$. (Грубо говоря, это означает, что (f_n) «очень быстро сходится по мере» к f.) Докажите, что $f_n \to f$ почти всюду.

7. Пусть (X,μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X,\mu)$ пространство классов эквивалентности (здесь эквивалентность — это равенство μ-п.в.) измеримых функций на X. Зафиксируем неубывающую ограниченную непрерывную функцию $\psi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, такую, что $\psi(0) = 0$, ψ строго возрастает в некоторой окрестности нуля, и $\psi(s+t) \le \psi(s) + \psi(t)$ для всех s,t. (Например, можно положить $\psi(t) = t/(1+t)$ или $\psi(t) = \max\{1,t\}$.) Докажите, что формула $\rho(f,g) = \int_X \psi(|f-g|)\,d\mu$ определяет метрику на $L^0(X,\mu)$, и что сходимость по этой метрике равносильна сходимости по мере.

8. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Обозначим через $L^0(X,\mu)$ пространство классов эквивалентности (здесь эквивалентность — это равенство μ-п.в.) измеримых функций на X. Докажите, что формула
$$\rho(f,g) = \min\bigl\{1,\ \inf\{a \ge 0 : \mu\{x : |f(x) - g(x)| \ge a\} < a\}\bigr\}$$
определяет метрику на $L^0(X,\mu)$, и что сходимость по этой метрике равносильна сходимости по мере.

9. Докажите, что на пространстве $L^0[0,1]$ нет топологии, сходимость в которой совпадала бы со сходимостью почти всюду.