Мера Лебега

1. Две конечные борелевские[1] меры на $[0,1]^2$ имеют равные значения на всех замкнутых (а) квадратах; (б) треугольниках. Доказать, что эти меры равны.

2. Доказать, что мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^2$ равна точной нижней грани сумм мер треугольников из счетных наборов, покрывающих E.

3. Верно ли, что граница всякого открытого множества на плоскости имеет лебеговскую меру нуль?

4. Доказать, что компакт на прямой положительной меры Лебега имеет мощность континуума.

5. Построить пример компакта в $[0,1]$ меры $1/\pi$ без внутренних точек.

6. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество положительной меры Лебега. Докажите, что для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такой интервал I, что $\lambda(A \cap I) > (1-\varepsilon)\lambda(I)$ (где λ — мера Лебега).

7. Дан компакт на плоскости лебеговской меры 1. Доказать, что в нем есть замкнутая часть меры 1/4.

8. Показать, что имеется ровно континуум компактов положительной меры Лебега в $\mathbb{R}^3$.

9. Для всякого ли $\varepsilon \in (0,1)$ в единичном квадрате есть компакт без внутренних точек меры Лебега ε?

10. Верно ли, что всякое объединение отличных от точек замкнутых квадратов на плоскости измеримо по Лебегу?

11. Доказать, что квадрат на плоскости можно представить в виде объединения дизъюнктных открытых кругов и множества меры нуль.

12. Доказать, что квадрат на плоскости нельзя представить в виде объединения замкнутых кругов ненулевых радиусов с попарно непересекающимися внутренностями.

13. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество положительной меры Лебега. Докажите, что множество $A - A = \{a - b : a, b \in A\}$ содержит окрестность нуля.

[1] Борелевская мера — это σ-аддитивная мера на борелевской σ-алгебре.